

## Persamaan Gelombang Nonlinier pada Dasar Perairan Miring

Syawaluddin Hutahaean

Pusat Studi Teknik Kelautan  
Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan  
Institut Teknologi Bandung  
Jl. Ganesha No.10 Bandung 40132  
E-mail: syawaluddin@ocean.itb.ac.id

### Abstrak

*Paper ini merupakan kelanjutan dari paper sebelumnya yang ditulis oleh Hutahaean (2007b) dimana persamaan dikembangkan untuk kondisi dasar perairan datar dan Hutahaean (2007c) untuk dasar perairan miring. Pengembangan yang dilakukan adalah dengan mengerjakan persamaan momentum terbatas pada perumusan persamaan dispersi. Selain itu diformulasikan juga persamaan shoaling dimana pada perhitungan shoaling diperairan dangkal terlihat terjadinya fenomena breaking.*

**Kata-kata Kunci:** Shoaling, breaking, persamaan momentum terbatas.

### Abstract

*This paper is an extension of earlier paper written by Hutahaean (2007b) for flat bottom and Hutahaean (2007c) for sloping bottom. The improvement is the application of limited momentum equation in derivation of dispersion equation. In this paper equation of shoaling is also derived where shoaling calculation in shallow water show breaking phenomena.*

**Keywords:** Shoaling, breaking, limited momentum equations.

## 1. Pendahuluan

Hutahaean (2007b) dan (2007c), telah merumuskan suatu persamaan potensial aliran gelombang yang mengandung fenomena *breaking*. Pada (2007b) digunakan kondisi dasar perairan datar sehingga terdapat kemungkinan akan menghasilkan perhitungan *shoaling* yang kurang tepat. Pada (2007c), perumusan dikerjakan untuk dasar perairan miring dan digunakan untuk pemodelan refraksi gelombang. Model refraksi tersebut dapat memodelkan *breaking* tetapi pada saat terjadi *breaking* suatu komponen pada persamaan potensial aliran harus diberi harga tertentu agar simulasi dapat terus berlangsung. Pada model ini *breaking* terjadi pada saat harga  $\gamma$  pada persamaan potensial aliran (6.1) adalah kurang dari 0.65, dimana setelah *breaking* harga  $\gamma$  tidak membesar dengan sendirinya dan model terhenti. Agar model dapat terus berjalan, maka pada saat harga  $\gamma < 0.65$ , diberikan harga  $\gamma = 0.65$ .

Penelitian ini dimaksudkan untuk memperbaiki fenomena *breaking* pada penelitian Hutahaean (2007c) dimana diharapkan *breaking* dapat disimulasikan tanpa bantuan pemberian suatu harga

tertentu pada suatu komponen persamaan potensial aliran.

Hutahaean (2005) mengembangkan persamaan muka air yang merupakan superposisi dari persamaan kontinuitas dengan persamaan kekekalan energi, dimana persamaan tersebut dapat mensimulasikan *breaking* yang sederhana. Dengan latar belakang ini maka dilakukan pengembangan dari persamaan yang dihasilkan oleh Hutahaean (2007c) dengan mengerjakan persamaan momentum yang terbatas yang dirumuskan berdasarkan persamaan keseimbangan momentum yang merupakan salah satu bentuk dari persamaan kekekalan energi juga. Keuntungan lain dari pengerjaan persamaan momentum-x yang terbatas ini, yaitu diperhitungkannya peranan percepatan arah-z, tanpa harus mengerjakan persamaan momentum pada arah sumbu-z.

## 2. Persamaan Muka Air dan Kondisi

### 2.1 Persamaan muka air pendekatan

Pada proses formulasi diperlukan bentuk dari  $\partial\eta/\partial t$  dan  $\partial\eta/\partial x$ , karena itu perlu diketahui persamaan muka air  $\eta$ . Untuk keperluan tersebut maka digunakan

persamaan muka air dari teori gelombang linier yaitu:

$$\eta = A \cos kx \cos \sigma t$$

Baik potensial kecepatan maupun persamaan muka air adalah bersifat sinusoidal. Untuk mempermudah proses perumusan, maka perumusan dikerjakan pada kondisi

$$\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

Dimana pada kondisi ini berlaku persamaan:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma A}{2} \text{ dan } \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{kA}{2} \quad (1)$$

## 2.2 Persamaan muka air pemodelan

Persamaan muka air untuk pengembangan model digunakan persamaan kontinuitas yang diintegrasikan terhadap kedalaman.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = 0 \quad (2)$$

## 3. Persamaan momentum

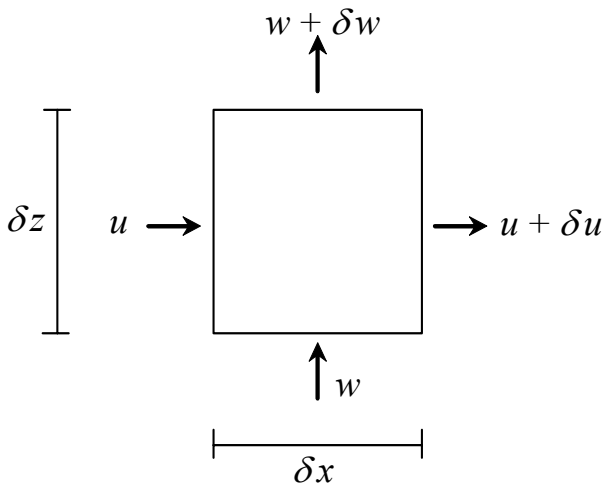
### 3.1 Persamaan momentum permukaan fluida ideal

Sebagai persamaan momentum digunakan persamaan momentum permukaan untuk fluida ideal, Huthaean (2007b dan 2007c), yaitu:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_{\eta}^2 + w_{\eta}^2) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_{\eta}}{\partial t} \right) = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3)$$

### 3.2 Persamaan keseimbangan momentum

Persamaan keseimbangan momentum dirumuskan dengan prosedur sebagaimana halnya dengan perumusan persamaan kontinuitas, yaitu sebagai berikut:



Hukum kekekalan masa, pada sistim input-output pada gambar di atas untuk fluida tak mampat adalah:

$$(u - (u + \delta u)) \delta z + (w - (w + \delta w)) \delta x = 0$$

Persamaan dibagi dengan  $\delta x$  dan  $\delta z$ ,

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0$$

Persamaan ini adalah persamaan kekekalan masa dimana bila diambil

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ dan } \frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\partial w}{\partial z} \text{ diperoleh persamaan nitas}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Pada penelitian ini  $\delta u/\delta x$  dan  $\delta w/\delta z$  akan dijabarkan dengan cara lain. Berdasarkan deret Taylor,

$$u(x + \delta x, z + \delta z, t + \delta t) = u(x, z, t) + \delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \delta z \frac{\partial u}{\partial z} + \delta t \frac{\partial u}{\partial t} u(x + \delta x, z + \delta z, t + \delta t) - u(x, t) = \delta x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \delta z \frac{\partial u}{\partial z} + \delta t \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\delta u = \delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \delta z \frac{\partial u}{\partial z} + \delta t \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\delta u = \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta t$$

Persamaan dibagi dengan  $\delta x$ ,

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\delta t}{\delta x}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{\delta w}{\delta z} = \left( u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\delta t}{\delta z}$$

$$\text{Substitusi persamaan untuk } \frac{\delta u}{\delta x} \text{ dan } \frac{\delta w}{\delta z}$$

kepersamaan kekekalan masa,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\delta t}{\delta x} + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\delta t}{\delta z} = 0$$

mengambil  $\delta x = \delta z = \delta$  dan persamaan dibagi dengan  $\delta t/\delta$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

**Persamaan (4)** ini terlihat merupakan persamaan keseimbangan antara percepatan horizontal arah  $x$  dan percepatan vertikal arah  $z$ . Meskipun persamaan ini dirumuskan dari prinsip kekekalan masa tetapi yang dihasilkan adalah persamaan keseimbangan momentum atau dapat juga disebut dengan persamaan kekekalan momentum atau energi.

Dengan mengerjakan sifat irrotasional fluida ideal,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \text{ serta } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ dan}$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ persamaan keseimbangan momentum menjadi}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + w^2) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + w^2) = 0$$

Persamaan berlaku pada seluruh medan aliran termasuk juga pada permukaan,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_\eta^2 + w_\eta^2) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u_\eta^2 + w_\eta^2) = 0$$

$f$  adalah suatu fungsi yang kontinu, maka berlaku

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \text{ begitu juga}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial z}$$

maka persamaan keseimbangan momentum menjadi

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_\eta^2 + w_\eta^2) - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u_\eta^2 + w_\eta^2) = 0 \quad (5)$$

### 3.3 Persamaan momentum yang terbatas

Pada persamaan keseimbangan momentum terlihat bahwa terdapat relasi antara  $\partial u/\partial t$  dengan  $\partial w/\partial t$  dimana hal ini menunjukkan bahwa terdapat keseimbangan antara percepatan pada arah sumbu- $x$  dengan percepatan pada arah sumbu- $z$ . Karena itu pada persamaan momentum seharusnya terdapat juga relasi tersebut. Pembentukan persamaan momentum- $x$  dimana terdapat relasi antara  $\partial u/\partial t$  dengan  $\partial w/\partial t$  dibentuk dengan menjumlahkan **Persamaan (3)** dengan **Persamaan (5)**,

$$2 \left( -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_\eta^2 + w_\eta^2) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u_\eta^2 + w_\eta^2) = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6)$$

**Persamaan (6)** adalah persamaan momentum yang terbatas yaitu bahwa  $\partial u/\partial t$  dibatasi oleh  $\partial w/\partial t$ . Atau gaya horisontal pada arah sumbu- $x$ , tidak hanya memberi percepatan pada arah sumbu- $x$ , juga menimbulkan percepatan pada arah sumbu- $z$ .

### 4. Persamaan Potensial Aliran

Persamaan potensial aliran dengan dasar perairan miring pada Hutahaeen (2007c) adalah:

$$\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t \quad (7)$$

dimana,

$$\beta(z) = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} ;$$

$$\beta_1(z) = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{I + \frac{\partial h}{\partial x}}{I - \frac{\partial h}{\partial x}} \quad (9)$$

$$k = \text{bilangan gelombang} = \frac{2\pi}{L}$$

$L$  = panjang gelombang

$$\sigma = \text{frekuensi sudut} = \frac{2\pi}{T}$$

$T$  = periode gelombang

$h$  = kedalaman perairan

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \text{keiringan dasar perairan}$$

## 5. Persamaan untuk $G$

Pada persamaan potensial **Persamaan (10)**, terdapat satu koefisien yaitu  $G$ . Persamaan untuk  $G$  ini dirumuskan dengan menggunakan persamaan mukai air yang terintegrasi terhadap kedalaman yaitu **Persamaan (2)** dan digunakan kondisi

$$\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

dimana pada kondisi ini dari hasil sebelumnya

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma A}{2} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{kA}{2}$$

Dengan  $\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$ , maka

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = Ge^{kh} \beta(z) k \sin kx \sin \sigma t$$

$$-Ge^{kh} (\beta(z) + \beta_1(z)) k \frac{\partial h}{\partial x} \cos kx \sin \sigma t$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x} e^{kh} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$$

$$\int_{-h}^{\eta} u dz = Ge^{kh} B_1 \sin kx \sin \sigma t$$

$$-Ge^{kh} (B_1 + B_2) \frac{\partial h}{\partial x} \cos kx \sin \sigma t$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x} e^{kh} \frac{B_1}{k} \cos kx \sin \sigma t$$

dimana:

$$\int_{-h}^{\eta} \beta(z) dz = \frac{\beta_1(\eta) - (\alpha - 1)}{k} = \frac{B_1}{k},$$

$$B_1 = \beta_1(\eta) - (\alpha - 1)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \beta_1(z) dz = \frac{\beta(\eta) - (\alpha + 1)}{k} = \frac{B_2}{k};$$

$$B_2 = \beta(\eta) - (\alpha + 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = Ge^{kh} B_1 k \cos kx \sin \sigma t$$

$$+ Ge^{kh} \frac{\partial B_1}{\partial x} \sin kx \sin \sigma t + Ge^{kh} B_1 k \frac{\partial h}{\partial x} \sin kx \sin \sigma t$$

$$+ Ge^{kh} (B_1 + B_2) k \frac{\partial h}{\partial x} \sin kx \sin \sigma t + \frac{\partial G}{\partial x} e^{kh} B_1 \sin kx \sin \sigma t$$

dimana

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = \beta(\eta) \left( k \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{k^2 A}{2} \right)$$

Dengan hasil integrasi tersebut, persamaan kontinuitas menjadi,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Ge^{kh} B_1 k \cos kx \sin \sigma t + Ge^{kh} \frac{\partial B_1}{\partial x} \sin kx \sin \sigma t$$

$$+ Ge^{kh} (2B_1 + B_2) k \frac{\partial h}{\partial x} \sin kx \sin \sigma t$$

$$+ \frac{\partial G}{\partial x} e^{kh} B_1 \sin kx \sin \sigma t = 0$$

digunakan kondisi

$$\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ maka}$$

$$Ge^{kh} \left( B_1 k + \frac{\partial B_1}{\partial x} + (2B_1 + B_2) k \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

$$= \sigma A - \frac{\partial G}{\partial x} e^{kh} B_1$$

Didefinisikan,

$$F = \left( B_1 k + \frac{\partial B_1}{\partial x} + (2B_1 + B_2) k \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$G = \frac{\sigma A}{e^{kh} F} - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{B_1 e^{kh}}{F e^{kh}}$$

$$G = \frac{\sigma A - \frac{\partial G}{\partial x} B_1 e^{kh}}{e^{kh} F} \quad (11)$$

**Persamaan (10)** diturunkan terhadap  $x$  dengan mengabaikan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\sigma A}{e^{kh} F^2} \left( \frac{\partial kh}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) - \frac{\partial G}{\partial x} e^{kh} \left( \frac{\partial kh}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \frac{1}{F e^{kh}}$$

$$+ \frac{\partial G}{\partial x} \frac{B_1}{F^2 e^{kh}} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (12)$$

$$\left( 1 + \frac{(\frac{\partial kh}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial x})}{F} - \frac{B_1}{e^{kh} F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\sigma A}{e^{kh} F^2} \left( \frac{\partial kh}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (13)$$

## 6. Kandungan Fenomena *Breaking* pada Persamaan Potensial Aliran

Untuk dasar perairan datar,  $\partial h / \partial x = 0$ , dan  $\partial G / \partial x$  dapat diabaikan maka harga  $G$  adalah  $G = \sigma A / F_0$  dimana:

$$F_0 = e^{kh} \left( B_1 k - \frac{\beta(\eta) k^2 A}{2} \right)$$

Didefinisikan  $\gamma = \left( \beta_1(\eta) - \frac{\beta(\eta) k A}{2} \right)$  maka,

$$F_0 = e^{kh} k \gamma \text{ sedangkan } G = \frac{\sigma A}{e^{kh} k \gamma}$$

Persamaan potensial aliran menjadi

$$\phi = \frac{\sigma A}{k \gamma} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t \quad (14)$$

Pada persamaan potensial aliran ini terlihat bahwa bila  $\gamma$  sangat kecil, mendekati nol maka  $\phi$  menjadi sangat besar, demikian juga dengan

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ dan } w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Telah banyak diketahui bahwa pada saat *breaking* terjadi kecepatan arus yang sangat besar. Jadi *beraking* terjadi pada  $\gamma$  sangat kecil. Bila *breaking* diambil untuk  $\gamma = 0$ , maka

$$\left( \beta_1(\eta) - \frac{\beta(\eta) k A}{2} \right) = 0 \text{ dan } \frac{\beta(\eta) 2 \pi A}{2 L} = \beta_1(\eta)$$

$$\frac{H}{L} = \frac{2 \beta_1(\eta)}{\pi \beta(\eta)} = \frac{2 \alpha e^{k(h+\eta)} - e^{-k(h+\eta)}}{\pi \alpha e^{k(h+\eta)} + e^{-k(h+\eta)}}$$

$$\text{untuk } \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \alpha = 1 \quad \frac{H}{L} = \frac{2 e^{k(h+\eta)} - e^{-k(h+\eta)}}{\pi e^{k(h+\eta)} + e^{-k(h+\eta)}}$$

Untuk amplitudo gelombang yang sangat kecil dibandingkan dengan kedalaman  $h$ ,

$$\frac{H}{L} = \frac{2 e^{kh} - e^{-kh}}{\pi e^{kh} + e^{-kh}} = \frac{2}{\pi} \tanh(kh)$$

Kriteria *breaking* dari Miche adalah  $H/L = 0.142 \tanh kh$ , Sarpkaya (1981). Jadi bentuk kondisi *breaking* dari potensial aliran yang diperoleh adalah sama dengan kondisi *breaking* dari Miche. Yang terpenting dalam hal ini adalah bahwa pada potensial aliran terdapat karakteristik *breaking* atau dengan kata lain persamaan potensial aliran dapat memodelkan *breaking*.

## 7. Persamaan Dispersi

Persamaan dispersi akan dirumuskan dengan menggunakan persamaan momentum terbatas dari **Persamaan (6)**, yaitu:

$$2 \left( -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_\eta^2 + w_\eta^2) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u_\eta^2 + w_\eta^2) = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

dimana,  $\phi = G e^{kh} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$  dengan  $G$  dari **Persamaan (11)**,

$$G = \frac{\sigma A - \frac{\partial G}{\partial x} B_1 e^{kh} k}{e^{kh} F}. \text{ Didefinisikan } R = \frac{p}{F}$$

Didefinisikan  $R = \frac{p}{F}$ , dimana  $p = \sigma A - \frac{\partial G}{\partial x} B_1 e^{kh} k$

sehingga  $G = \frac{p}{e^{kh} F}$ . Dengan harga  $G$  ini maka

persamaan potensial kecepatan menjadi  $\phi = R \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$ .

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = R \beta(z) k \sin kx \sin \sigma t - R \beta_1(z) \frac{\partial kh}{\partial x} \cos kx \sin \sigma t - \frac{\partial R}{\partial x} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -R \beta_1(z) k \cos kx \sin \sigma t$$

Sebagaimana halnya dengan formulasi  $G$ , maka pada formulasi persamaan dispersi ini digunakan kondisi

$$\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

dimana pada kondisi ini dari hasil sebelumnya

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma A}{2} \text{ dan } \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{k A}{2}, \text{ diperoleh } u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial x} = \frac{R^2}{4} \beta^2(\eta) k^3 + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{R}{4} \frac{\partial R}{\partial x} \beta^2(\eta) k^2 \\
 w_\eta \frac{\partial w_\eta}{\partial x} & = -\frac{R^2}{4} \beta_1^2(\eta) k^3 + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & + \frac{R}{4} \frac{\partial R}{\partial x} \beta_1^2(\eta) k^2 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} \right) & = -\frac{\sigma}{2} R \beta(\eta) k + \frac{\sigma}{2} R \beta_1(\eta) k \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) \\
 u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial z} & = \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 - \frac{R^2}{2} \beta^2(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & - \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^2 \\
 w_\eta \frac{\partial w_\eta}{\partial z} & = \frac{1}{4} R^2 k^3 \beta(\eta) \beta_1(\eta) \\
 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} & = \frac{\sigma}{2} R \beta_1(\eta) k
 \end{aligned}$$

Dengan hasil formulasi tersebut, maka persamaan momentum-x menjadi,

$$\begin{aligned}
 & \frac{R^2}{2} \beta^2(\eta) k^3 + \frac{R^2}{2} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & + \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta^2(\eta) k^2 - \frac{R^2}{2} \beta_1^2(\eta) k^3 \\
 & + \frac{R^2}{2} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta_1^2(\eta) k^2 \\
 & + \sigma R \beta(\eta) k - \sigma R \beta_1(\eta) k \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & - \sigma \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 - \frac{R^2}{2} \beta^2(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & - \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^2 + \frac{1}{4} R^2 k^3 \beta(\eta) \beta_1(\eta) \\
 & - \frac{\sigma}{2} R \beta_1(\eta) k = \frac{gAk}{2} \quad (15)
 \end{aligned}$$

**Persamaan (15)** adalah persamaan untuk  $k$  yang bersifat nonlinier, sehingga penyelesaiannya adalah

dengan cara iterasi, antara lain metoda iterasi dari Newton-Rhapson, Arden (1971). Adapun langkah perhitungannya adalah sebagai berikut. Persamaan dispersi dapat ditulis sebagai suatu fungsi  $f(k) = 0$ , yaitu:

$$\begin{aligned}
 f(k) & = \frac{R^2}{4} \beta^2(\eta) k^3 + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & + \frac{R}{4} \frac{\partial R}{\partial x} \beta^2(\eta) k^2 - \frac{R^2}{4} \beta_1^2(\eta) k^3 \\
 & + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{R}{4} \frac{\partial R}{\partial x} \beta_1^2(\eta) k^2 \\
 & + \frac{\sigma}{2} R \beta(\eta) k - \frac{\sigma}{2} R \beta_1(\eta) k \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 - \frac{R^2}{2} \beta^2(\eta) k^3 \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & - \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^2 + \frac{1}{4} R^2 k^3 \beta(\eta) \beta_1(\eta) \\
 & - \frac{\sigma}{2} R \beta_1(\eta) k - \frac{gAk}{2} = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

## 8. Karakteristik Linier dari Persamaan Dispersi dan Potensial Aliran

Sampai pada saat ini untuk menentukan validitas suatu persamaan gelombang nonlinier adalah bahwa persamaan gelombang tersebut harus mempunyai karakteristik linier yaitu pada dasar perairan datar dan dengan amplitudo sangat kecil mempunyai panjang gelombang yang sama dengan panjang gelombang dari teori gelombang linier, Li (1999) dan Meftah (2004).

Pada dasar perairan datar, berlaku persamaan  $R = \sigma A / F$ , sedangkan persamaan momentum menjadi,

$$\begin{aligned}
 & \frac{R^2}{2} \beta^2(\eta) k^3 + \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta^2(\eta) k^2 - \frac{R^2}{2} \beta_1^2(\eta) k^3 \\
 & + \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta_1^2(\eta) k^2 \\
 & + \sigma R \beta(\eta) k - \sigma \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) + \frac{R^2}{4} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \\
 & - \frac{R}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^2 + \frac{1}{4} R^2 k^3 \beta(\eta) \beta_1(\eta) \\
 & - \frac{\sigma}{2} R \beta_1(\eta) k = \frac{gAk}{2}
 \end{aligned}$$

Substitusi  $R = \frac{\sigma A}{F}$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2 A^2}{2F^2} \beta^2(\eta) k^3 - \frac{\sigma^2 A^2}{2F^3} \frac{\partial F}{\partial x} \beta^2(\eta) k^2 \\ & - \frac{\sigma^2 A^2}{2F^2} \beta_1^2(\eta) k^3 - \frac{\sigma^2 A^2}{2F^3} \frac{\partial F}{\partial x} \beta_1^2(\eta) k^2 \\ & + \frac{\sigma^2 A}{F} \beta(\eta) k - \frac{\sigma^2 A}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \beta(\eta) \\ & + \frac{\sigma^2 A^2}{4F^2} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 + \frac{\sigma^2 A^2}{2F^3} \frac{\partial F}{\partial x} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^2 \\ & + \frac{\sigma^2 A^2}{4F^2} k^3 \beta(\eta) \beta_1(\eta) - \frac{\sigma^2 A}{2F} \beta_1(\eta) k = \frac{gAk}{2} \end{aligned}$$

Persamaan dikalikan dengan  $\frac{2F}{A}$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2 A}{F} \beta^2(\eta) k^3 - \frac{\sigma^2 A}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \beta^2(\eta) k^2 - \frac{\sigma^2 A}{F} \beta_1^2(\eta) k^3 \\ & - \frac{\sigma^2 A}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \beta_1^2(\eta) k^2 + 2\sigma^2 \beta(\eta) k \\ & - \frac{2\sigma^2}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \beta(\eta) + \frac{\sigma^2 A}{2F} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^3 \\ & + \frac{\sigma^2 A}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \beta(\eta) \beta_1(\eta) k^2 + \frac{\sigma^2 A}{2F} k^3 \beta(\eta) \beta_1(\eta) \\ & - \sigma^2 \beta_1(\eta) k = gkF \end{aligned}$$

Pada amplitudo gelombang yang sangat kecil, suku yang mengandung unsur  $A$  menjadi sangat kecil dan dapat diabaikan,

$$2\sigma^2 \beta(\eta) k - \sigma^2 \frac{\partial F}{\partial x} \beta(\eta) - \sigma^2 \beta_1(\eta) k = gkF$$

Dari **Persamaan (10)**, maka untuk dasar perairan datar

$$F = \left( B_1 k + \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \text{ sedangkan } B_1 = \beta_1(\eta)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = \beta(\eta) \left( k \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{k^2 A}{2} \right) = 0 \text{ sehingga}$$

$$F = \beta_1(\eta) k \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Persamaan dispersi menjadi:

$$2\sigma^2 \beta(\eta) k - \sigma^2 \beta_1(\eta) k = gkF \text{ atau}$$

$$\sigma^2 \beta(\eta) \left( 2 - \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} \right) = gF$$

Substitusi  $F = \beta_1(\eta) k$  dan persamaan dibagi dengan

$$\beta(\eta), \quad \sigma^2 (2 - \tanh kh) = gk \tanh kh$$

dimana pada dasar perairan datar dan amplitudo yang sangat kecil,

$$\frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} = \tanh kh \text{ Pada perairan dalam dimana}$$

$\tanh kh \rightarrow 1$ , maka persamaan dispersi menjadi

$$\sigma^2 = gk \tanh kh,$$

yang merupakan persamaan dispersi dari teori gelombang linier pada perairan dalam. Jadi persamaan dispersi yang dihasilkan mempunyai karakteristik linier pada perairan dalam, dasar perairan datar dan amplitudo sangat kecil.

Selain persamaan dispersi, persamaan potensial kecepatan juga mempunyai karakteristik linier pada perairan dalam dan untuk amplitudo gelombang yang kecil dimana pada kondisi ini potensial aliran adalah

$$\phi = \frac{\sigma A}{F} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$$

Telah ditunjukkan bahwa pada dasar perairan datar dan amplitudo kecil,

$F = \beta_1(\eta) k$ , persamaan potensial aliran menjadi

$$\phi = \frac{\sigma A}{k \beta_1(\eta)} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$$

Untuk amplitudo kecil dan dasar perairan datar telah ditunjukkan bahwa persamaan dispersi adalah

$$k = \frac{\sigma^2}{g \tanh kh}, \text{ persamaan potensial aliran menjadi}$$

$$\phi = \frac{gA \tanh kh}{\beta_1(\eta)} \beta(z) \cos kx \sin \sigma t$$

Berdasarkan definisi dari  $\beta_1(\eta)$

Berdasarkan definisi dari  $\beta_1(\eta)$  dan  $\beta(\eta)$ , maka untuk amplitudo kecil dan dasar perairan datar,  $\beta_1(\eta) = 2 \sinh kh$  sedangkan  $\beta(z) = 2 \cosh k(h+z)$ , potensial aliran menjadi

$$\phi = \frac{gA}{\sigma \cosh kh} \cosh k(h+z) \cos kx \sin \sigma t$$

yang merupakan potensial aliran dari teori gelombang linier. Jadi baik persamaan dispersi maupun persamaan potensial aliran mempunyai karakteristik linier pada dasar perairan datar dan untuk amplitudo gelombang yang sangat kecil dan pada perairan dalam.

Pada perairan yang sangat dalam dimana  $\tanh kh = 1$ , persamaan dispersi menjadi  $k = s^2/g$  sedangkan persamaan potensial aliran menjadi,

$$\phi = \frac{gA}{2\sigma \sinh kh} \cosh k(h+z) \cos kx \sin \sigma t$$

Jadi karakteristik linier dari persamaan potensial aliran terdapat pada kedalaman dimana  $\tanh kh \rightarrow 1$ .

## 9. Analisis Shoaling

*Shoaling* adalah pembesaran amplitudo gelombang akibat pengurangan kedalaman. Perhitungan *shoaling* dapat dilakukan dengan membentuk persamaan elevasi muka air. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan muka air tersebut dibentuk persamaan untuk elevasi muka air tertinggi. Amplitudo gelombang pada suatu kedalaman adalah elevasi muka air maksimum. Sebagai persamaan muka air digunakan persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman, yaitu:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = 0$$

Selanjutnya digunakan potensial aliran gelombang progressif, yaitu:

$$\phi = -R\beta(z) \sin(kx - \sigma t) \quad (\text{Dean, 1984}) \text{ atau}$$

$$\phi = -R\beta(z) \sin \psi \quad \text{dimana} \quad \psi = kx - \sigma t$$

Dengan potensial aliran ini maka.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = -RB_1 k \sin \psi + R \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \psi$$

$$+ RB_2 k \frac{\partial h}{\partial x} \cos \psi + 2 \frac{\partial R}{\partial x} B_1 \cos \psi$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = RB_1 k \sin \psi - R \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \psi - RB_2 k \frac{\partial h}{\partial x} \cos \psi$$

$$- 2 \frac{\partial R}{\partial x} B_1 \cos \psi$$

Persamaan diintegrasikan terhadap  $t$ ,

$$\eta(x,t) = \frac{R}{\sigma} B_1 k \cos \psi + \frac{R}{\sigma} \frac{\partial B_1}{\partial x} \sin \psi + \frac{R}{\sigma} B_2 k \frac{\partial h}{\partial x} \sin \psi + \frac{2}{\sigma} \frac{\partial R}{\partial x} B_1 \sin \psi + c(t) \quad (17)$$

**Persamaan (17)** ini adalah persamaan muka air, dimana berdasarkan Dean (1984),  $c(t) = 0$ . Persamaan muka air diturunkan terhadap  $\psi$ ,

$$+ \frac{R}{\sigma} B_2 k \frac{\partial h}{\partial x} \cos \psi + \frac{2}{\sigma} \frac{\partial R}{\partial x} B_1 \cos \psi$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \psi} = -\frac{R}{\sigma} B_1 k \sin \psi + \frac{R}{\sigma} \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \psi$$

Harga  $\eta_{\max}$  dicapai pada  $\frac{\partial \eta}{\partial \psi} = 0$ , diperoleh

$$\tan \psi = \frac{\left( \frac{\partial B_1}{\partial x} + B_2 k \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2B_1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right)}{B_1} \quad (18)$$

Dengan menggunakan  $\psi$  dari **Persamaan (18)**, dapat dihitung  $\eta_{\max}$  dengan menggunakan **Persamaan (17)** yang merupakan amplitudo gelombang. Jadi amplitudo gelombang pada suatu kedalaman  $h$ , dengan amplitudo mula-mula  $A_0$  adalah  $A_0 = \eta_{\max}$ .  $R$ ,  $B_1$  dan  $k$  dihitung dengan amplitudo mula-mula yaitu  $A_0$ . Dengan koefisien *shoaling*  $k_s$  adalah  $k = A/A_0$ .

## 10. Contoh Hasil Perhitungan

### 10.1 Panjang gelombang pada perairan dalam

Tabel 1. Panjang gelombang pada perairan dalam

h (m)	L-lin (m)	L-0.0005 (m)	L-0.5 (m)	L-0.6 (m)
80.00	56.21	56.21	56.18	56.17
79.00	56.21	56.21	56.18	56.17
78.00	56.21	56.21	56.18	56.17
77.00	56.21	56.21	56.18	56.17
76.00	56.21	56.21	56.18	56.17
75.00	56.21	56.21	56.18	56.17
74.00	56.21	56.21	56.18	56.17
73.00	56.21	56.21	56.18	56.17
72.00	56.21	56.21	56.18	56.17
71.00	56.21	56.21	56.18	56.17
70.00	56.21	56.21	56.18	56.17
69.00	56.21	56.21	56.18	56.17
68.00	56.21	56.21	56.18	56.17
67.00	56.21	56.21	56.18	56.17
66.00	56.21	56.21	56.18	56.17
65.00	56.21	56.21	56.18	56.17
64.00	56.21	56.21	56.18	56.17
63.00	56.21	56.21	56.18	56.17
62.00	56.21	56.21	56.18	56.17
61.00	56.21	56.21	56.18	56.17
60.00	56.21	56.21	56.18	56.17



Keterangan:

h : kedalaman perairan  
 Ks-lin : koefisien shoaling hasil teori gelombang linier  
 Ks-0.x : koefisien shoaling hasil model, dengan amplitudo diperairan dalam 0.x m

Telah banyak diketahui bahwa pada saat terjadi *breaking* timbul arus dengan kecepatan yang besar, dimana salah satunya adalah arus sejajar pantai (arus littoral). Pada pmodelan 2 dimensi arah x-z ini tidak terdapat komponen kecepatan arah-y yang merupakan komponen kecepatan sejajar pantai. Jadi hasil perhitungan *breaking* pada model arah x-z ini masih kurang benar.

## 10.2 Pengaruh kemiringan terhadap shoaling

Pada **Tabel 2** disajikan hasil perhitungan koefisien *shoaling* untuk amplitudo gelombang 0.6 m, periode gelombang 6 detik, dengan kemiringan dasar perairan bervariasi yaitu 0.002, 0.004 dan 0.008. Pada tabel tersebut terlihat bahwa pada kedalaman 8-20 m, semakin besar kemiringan, semakin kecil koefisien *shoaling*.

Tetapi pada kedalaman kurang dari 8 m, didapat koefisien *shoaling* yang sama pada masing-masing kemiringan, atau sedikit lebih besar, yaitu semakin besar kemiringan semakin besar koefisien *shoaling*nya. Pada kondisi setelah *breaking*, semakin kecil kemiringan semakin besar pengurangan amplitudo gelombang akibat *breaking*. Hal ini dikarenakan setelah *breaking* masih terjadi *shoaling* sedangkan kemiringan yang lebih besar menghasilkan *shoaling* yang lebih besar pada perairan dangkal. Kondisi *shoaling* dengan kemiringan yang cukup besar ini menunjukkan potensi persamaan untuk digunakan pada analisis run-up pada pantai maupun pada bangunan pantai.

**Tabel 2. Pengaruh kemiringan terhadap shoaling dan fenomena breaking**

h (m)	L-lin (m)	L-0.0005 (m)	L-0.5 (m)	L-0.6 (m)
20.000	966	995	993	985
19.000	961	996	992	986
18.000	955	996	993	987
17.000	950	996	993	988
16.000	944	996	994	988
15.000	938	996	994	989
14.000	932	997	995	990
13.000	926	997	995	991
12.000	921	997	995	992
11.000	917	997	996	993
10.000	914	997	996	994
9.000	913	997	996	995
8.000	914	996	997	996
7.000	919	996	997	997
6.000	928	995	996	997
5.000	943	992	994	997
4.000	969	987	991	995
3.000	1.012	977	982	990
2.000	1.088	946	955	971
1.000	1.258	790	826	876

Keterangan:

h : kedalaman perairan  
 Ks-lin : koefisien shoaling hasil teori gelombang linier  
 Ks-0.x : koefisien shoaling hasil model, dengan kemiringan dasar perairan 0.x

## 11. Kesimpulan

1. Potensial kecepatan dan persamaan dispersi yang dihasilkan mempunyai karakteristik linier pada perairan dalam dan dengan amplitudo kecil. Hal ini telah dibuktikan baik secara analitis maupun dengan hasil perhitungan. Bagi sejumlah peneliti kandungan karakteristik linier pada suatu persamaan gelombang nonlinier merupakan petunjuk akan validitas suatu persamaan gelombang nonlinier, Li (1999) dan Meftah (2004).
2. Persamaan potensial aliran yang dihasilkan mengandung fenomena breaking dimana pada penelitian ini pemodelan dapat terus berlangsung pada saat terjadi breaking tanpa dibantu dengan pemberi harga tertentu pada unsur persamaan potensial aliran.
3. Persamaan potensial aliran yang dihasilkan mengandung fenomena breaking dimana pada penelitian ini pemodelan dapat terus berlangsung pada saat terjadi breaking tanpa dibantu dengan pemberi harga tertentu pada suatu unsur persamaan potensial aliran. Hal ini sangat sesuai dengan tujuan penelitian yaitu mendapatkan persamaan potensial aliran yang dapat memodelkan breaking secara otomatis.
4. Meskipun persamaan dapat memodelkan breaking dengan baik, tetapi perlu pengembangan lebih lanjut yaitu pengerjaan persamaan kekekalan energi pada persamaan muka air. Hal ini dikarenakan pada saat terjadi breaking terjadi arus yang sangat besar atau terjadi perubahan energi kinetik, karena itu diperlukan suatu media untuk mentransfer energi gelombang menjadi energi kinetik, yaitu persamaan kekekalan energi.

## Daftar Pustaka

- Bruce, A.W., and Kenneth, A.N., 1970, *Numerical Algorithms: Origins and Applications*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Dean, Robert G., and Dalrymple, 1984, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- Hutahaeen, S., 2005, *Model Difraksi dengan Persamaan Gelombang Air yang Disempurnakan*, Thesis S3, Departemen Teknik Sipil, ITB.
- Hutahaeen, S., 2007b, Kajian Teoritis terhadap Persamaan Gelombang Nonlinier, *Jurnal Teknik Sipil*, Volume 14, No. 3, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaeen, S., 2007c, Model Refraksi Gelombang dengan Menggunakan Persamaan Gelombang Nonlinier, *Jurnal Infrastruktur dan Lingkungan Binaan*, Volume III, No. 2, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Li, Y. S., Liu, S.-X., Yu, Y.-X., and Lai, G.-Z., 1999, Numerical Modeling of Boussinesq Equations by Finite Element Method J. Coastal Engineering, Elsevier.
- Meftah, Sorgent, P., and Gami P., 2004, Linear Analysis of A New Type of Extended Boussinesq Model. Coastal Engineering.
- Sarpkaya, T., and Michael, I., 1981, *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, Van Nostrand Reinhold Company.